

توان

به نام خدا

در این جلسه می‌فوازیم با توان و اعداد تواندار آشنا بشیم.

اصلا توان چی هست و به چه اعدادی اعداد تواندار می‌گن؟

فرض کنید ۱۰ بار می‌فوازیم عدد ۲ رو در خودش ضرب کنیم، باید بنویسیم:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

به نظر شما این روش نمایش روش مناسبیه؟ قطعا نه. چرا؟

اول اینکه فضای زیادی اشغال میکنه

دوم اینکه ممکنه توی شمردن دچار اشتباه بشیم

سوم اینکه اعداد خیلی بزرگتر رو واقعا نمی‌تونیم نمایش بدیم، مثلا فکر کنید می‌فوازیم ۲۰۰ بار عدد ۸ رو در خودش ضرب کنیم، فب خیلی سفته ۲۰۰ بار ضرب رو نمایش بدیم.

به خاطر همین مشکلات، تصمیم بر این شد که از توان استفاده بشه، یعنی به جای اینکه ۱۰ بار ۲ رو در خودش ضرب کنیم، اون رو به صورت زیر بنویسیم:

$$2^{10}$$

یا مثلا به جای اینکه ۲۰۰ بار ۸ رو در خودش ضرب کنیم، اونو بصورت زیر نمایش بدیم:

$$8^{200}$$

همینطور که میبینید این مدل نمایش خیلی راحت تره.

این اعدادی که الان نوشتیم اعداد تواندار هستن. عددی که پایین نوشته شده "پایه" و عددی که بالا نوشته شده "توان" نام داره، یعنی عدد تواندار به این صورت نوشته میشه:

توان

پایه

وقتی میگیریم 5^4 ، یعنی ۵ رو ۴ بار در خودش ضرب کنیم. یعنی:

$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

توجه داشته باشید، "توان" نشوندهنده تعداد دفعاتی هست که پایه در خودش ضرب میشه.

چند تا مثال میزنیم تا بیشتر با اعداد تواندار آشنا بشیم.

عددهای تواندار زیر رو به صورت گسترده بنویسید:

$$6^4 \text{ و } 3^6 \text{ و } (-1)^5 \text{ و } \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

6^4 یعنی چی؟ یعنی ۶ به تعداد ۴ بار در خودش ضرب بشه:

$$6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6$$

3^6 یعنی چی؟ یعنی ۳ به تعداد ۶ بار در خودش ضرب بشه:

$$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$(-1)^5$ یعنی چی؟ یعنی ۱- به تعداد ۵ بار در خودش ضرب بشه؛

$$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$$

$(\frac{2}{3})^3$ یعنی چی؟ یعنی $\frac{2}{3}$ به تعداد ۳ بار در خودش ضرب بشه؛

$$(\frac{2}{3})^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ در صورت امکان موارد نادرست را اصلاح کنید.

$$4^2 = 64$$

$$5^2 = 5 \times 2$$

$$(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$$

$$9^2 = 18$$

خب دونه به دونه می نویسیم و حساب می کنیم؛

4^2 رو باید بطوری به دست بیاریم؟ ۴ رو دو بار در خودش ضرب کنیم؛

$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$

پس این اشتباه مناسبه شده بود.

5^2 رو باید بطوری به دست بیاریم؟ ۵ رو دو بار در خودش ضرب کنیم؛

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

این هم اشتباه مناسبه شده بود.

$(\frac{2}{3})^2$ رو باید چطوری به دست بیاریم؟ $\frac{2}{3}$ رو دو بار در خودش ضرب کنیم:

$$(\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

این درست مناسبه شده.

9^2 رو باید چطوری به دست بیاریم؟ ۹ رو دو بار در خودش ضرب کنیم:

$$9^2 = 9 \times 9 = 81$$

این هم اشتباه مناسبه شده بود!

اشتباهی که خیلی از دانش آموزا می‌کنن می‌دونید چیه؟

به جای اینکه به تعداد عدد توان، پایه رو در خودش ضرب کنن، پایه رو در توان ضرب میکنند. یعنی چی؟ مثلاً همین 9^2 :

9^2 یعنی ۹ رو ۲ بار در خودش ضرب کنید یعنی : 9×9

ولی بعضی‌ها به اشتباه ۹ رو در ۲ ضرب میکنند که این غلطه

پس به این نکته خیلی توجه داشته باشید.

چند تا مثال دیگه با هم ببینیم:

۴- حاصل هر عبارت توان دار را به دست آورید.

$3^2 =$	$4^2 =$	$5^2 =$	$6^2 =$	$7^2 =$
$8^2 =$	$9^2 =$	$10^2 =$	$11^2 =$	$12^2 =$
مجدور دو = $\frac{2^3}{5^2} =$ $0/01^2 =$	مجدور یک = $(\frac{3}{4})^2 =$ $1/1^2 =$	مکعب دو = $\frac{2^4}{7} =$ $2/1^2 =$	مکعب یک = $0/2^2 =$ $0/5^2 =$	

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$6^2 = 6 \times 6 = 36$$

$$7^2 = 7 \times 7 = 49$$

$$8^2 = 8 \times 8 = 64$$

$$9^2 = 9 \times 9 = 81$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$11^2 = 11 \times 11 = 121$$

$$12^2 = 12 \times 12 = 144$$

$$2^2 = 2^2 = 4$$

$$1^2 = 1^2 = 1$$

$$1^3 = 1^3 = 1$$

$$2^3 = 2^3 = 8$$

$$\frac{2^3}{5^2} = \frac{8}{25}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$$

$$\frac{2^4}{7} = \frac{16}{7}$$

$$0.2^2 = 0.2 \times 0.2 = 0.04$$

$$0.01^2 = 0.01 \times 0.01 = 0.0001$$

$$1.1^2 = 1.1 \times 1.1 = 1.21$$

$$2.1^2 = 2.1 \times 2.1 = 4.41$$

$$0.5^2 = 0.5 \times 0.5 = 0.25$$

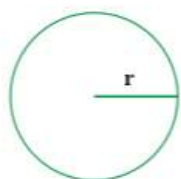
حل تمرین صفحه ۱۶

توان

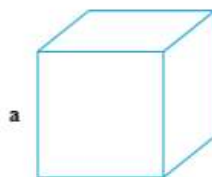
۱- با توجه به شکل های زیر مساحت و حجم های خواسته شده را با عبارت های توان دار جبری نمایش دهید.



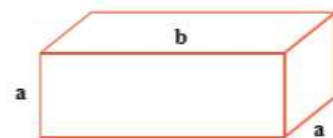
$$S = a \times a$$



$$S = \pi r \times r =$$



$$V = a \times a \times a =$$



$$V =$$

مساحت مربع به ضلع a پی می شه؟ $a \times a$ ، اینجا a چند بار در خودش ضرب شده؟ ۲
بار پس میتونیم بنویسیم:

$$s = a^2$$

مساحت دایره با شعاع ۲:

۲ دو بار در خودش ضرب شده:

$$s = 3.14 \times r \times r = 3.14 \times r^2$$

مجموع مکعب به ضلع a:

a سه بار در خودش ضرب شده:

$$v = a \times a \times a = a^3$$

مجموع مکعب مستطیل به ابعاد a , a , b:

$$v = a \times a \times b = a^2 b$$

۲- جمله‌های کلامی زیر را به صورت عبارت جبری نشان دهید.

$$a^1 = a$$

□ هر عدد به توان یک برابر خودش می‌شود:

$$1^a = 1$$

□ یک به توان هر عدد برابر یک می‌شود:

$$a^2 = \text{مجدور } a$$

□ مجذور هر عدد؛ یعنی آن عدد به توان ۲:

$$x^3 = \text{مکعب } x$$

□ مکعب یک عدد؛ یعنی آن عدد به توان ۳:

$$0^x = 0, x \neq 0$$

□ صفر به توان هر عدد به جز صفر برابر است با:

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

ماسبه عبارت تواندار

ترتیب انجام عملیات رو در سالهای قبل یاد گرفتیم، امسال به عمل دیگه هم یاد گرفتیم ... به توان رسوندن

حالا میفوییم ببینیم "به توان رسوندن" اولویت ماسبهش کجاس.

ترتیب عملیات ریاضی به این صورته:

۱. پرانتز

۲. توان

۳. ضرب و تقسیم

۴. جمع و تفریق

پس اگه چند تا عملیات پشت سر هم داشتیم، به این ترتیبی که اینجا گفته شده

عملیات رو انجام میدیم.

مثال:

$$\frac{10 \div (8 - 6) + 9 \times 4}{2^5 + 3^5} =$$

میفوییم این عبارت رو ساده کنیم.

طبق مطلب قبل، بالاترین اولویت مربوط به پرانتز، یعنی ما تا وقتی پرانتزها مون رو ساده نکردیم مجاز نیستیم بقیه عملیات رو انجام بدیم. اینجا به پرانتز داریم:

$$\frac{10 \div (8 - 6) + 9 \times 4}{2^5 + 3^5} = \frac{10 \div 2 + 9 \times 4}{2^5 + 3^5} =$$

خب، جواب پرانتز رو به دست آوردیم، اولویت بعدی چیه؟ به توان رسوندن. پس هر چی عدد تواندار داریم، ساده می‌کنیم:

$$\frac{10 \div 2 + 9 \times 4}{2^5 + 3^5} = \frac{10 \div 2 + 9 \times 4}{32 + 243} =$$

دیگه عدد تواندار نداریم.

اولویت بعدی چیه؟ ضرب و تقسیم. پس هر چی ضرب و تقسیم داریم انجام میدیم:

$$\frac{10 \div 2 + 9 \times 4}{32 + 243} = \frac{5 + 36}{32 + 243}$$

ضرب و تقسیمها رو هم انجام دادیم.

اولویت بعدی چیه؟ جمع و تفریق. پس هر چی جمع یا تفریق داشتیم انجام میدیم:

$$\frac{5 + 36}{32 + 243} = \frac{41}{275}$$

پرانتز و توان

اگر داخل یک پرانتز ضرب یا تقسیم انجام شده باشد و پرانتز به توان رسیده باشد،
توان بالای پرانتز به تک تک اعداد توی پرانتز هم میرسه.

اما اگر داخل پرانتز جمع یا تفریق داشته باشیم، اجازه نداریم که توان رو به اعداد داخل
پرانتز بدیم.

مثالی زیر رو ببینید:

$$\left(\frac{8}{5}\right)^2$$

آیا در اینجا می‌تونیم توان ۲ رو به ۸ و ۵ بدیم؟

بله می‌تونیم. چون داخل پرانتز تقسیم داریم. (میدونیم که خط کسری معادل تقسیمه).
بنابراین:

$$\left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{8^2}{5^2}$$

مثال بعد:

$$(4 + 3)^5 =$$

آیا توان ۵ رو می‌تونیم به ۴ و ۳ بدیم؟

خیر، چون داخل پرانتز جمع داریم.

حل تمرین صفحه ۱۹

ماسبه عبارت توان دار

۱- کدام درست و کدام نادرست اند؟ علت نادرستی را توضیح دهید.

$$(3+2)^0 = 2^0 + 3^0$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^0 > \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 > 1$$

$$4 + 2^0 = 6$$

$$2^0 + 3^0 + 5^0 = 1$$

$$4^0 < (-2)^2$$

نکته: هر عدد که به توان صفر برسه با ۱ برابر میشه.

طرفین تساویها رو حساب می کنیم تا ببینیم با هم برابر هستن یا نه:

$$(3 + 2)^0 = 5^0 = 1$$

$$3^0 + 2^0 = 1 + 1 = 2$$

طرفین تساوی با هم برابر نیستند پس نادرسته.

قسمت بعد:

ابتدا طرفین نامساوی رو مناسبه می کنیم:

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = +\frac{1}{4}$$

توجه داشته باشید که در اینجا علامت منفی به توان ۲ رسیده و مثبت شده.

$$1 > +\frac{1}{4} \rightarrow \left(2\frac{1}{2}\right)^0 > \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

درسته.

قسمت بعد:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 + 1 = 2$$

بنابراین:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 > 1$$

درسته.

قسمت بعد:

$$4 + 2^0 = 4 + 1 = 5$$

$$5 \neq 6$$

پس نادرسته.

قسمت بعد:

$$2^0 + 3^0 + 5^0 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$3 \neq 1$$

پس نادرسته.

قسمت بعد:

طرفین تساوی رو مناسبه می‌کنیم:

$$4^0 = 1$$

$$(-2)^2 = 4$$

$$1 < 4 \rightarrow 4^0 < (-2)^2$$

پس درست.

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam7

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.